

Exercício1: Cálculo dos Pontos Fíxos:

Lotka-Volterra

$$\dot{P}(t) = rP(t) - \alpha P(t)Z(t)$$

Crescimento Malthusiano

$$\dot{Z}(t) = \delta \alpha P(t)Z(t) - dZ(t)$$

Resposta funcional de predação Holling tipo 1

Variáveis dependentes:

- P - presa
- Z – predador

Variável independente:

- t - tempo

Parâmetros

r – taxa de crescimento

δ – taxa de reprodução de predadores por presa consumida

α - coeficiente de predação

d – taxa de mortalidade do predador

Passos:

1. Cálculo dos pontos fixos
2. Linearização do sistema: Cálculo da Matriz Jacobiana
3. Autovalores da Matriz Jacobiana em torno de cada ponto fixo

1. Cálculo dos pontos fixos

$$P(t)(r - \alpha Z(t)) = 0$$

$$Z(t)(\delta \alpha P(t) - d) = 0$$

Quais destes pontos é solução do sistema acima?

() $(P, Z) = (0, 0)$

() $(P, Z) = (\hat{P}, 0)$

() $(P, Z) = (0, \check{Z})$

() $(P, Z) = (\hat{P}, \hat{Z})$



INCT
IN-TREE
Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia em
Estudos Interdisciplinares e Transdisciplinares
em Ecologia e Evolução

**ESCOLA DE
BIOMATEMÁTICA
DA BAHIA**

Predador- Presa: Pearl-Verhulst

Crescimento Logístico: Pearl-Verhulst

$$\dot{P}(t) = rP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{k} \right) - \alpha P(t)Z(t)$$

$$\dot{Z}(t) = \delta \alpha P(t)Z(t) - dZ(t)$$

Resposta funcional de predação Holling tipo 1

Variáveis dependentes:

- P - presa
- Z – predador

Variável independente:

- t - tempo

Parâmetros

r – taxa de crescimento

δ – taxa de reprodução de predadores por presa consumida

α – coeficiente de predação

d – taxa de mortalidade do predador

k – capacidade de suporte do sistema

Passos:

1. Cálculo dos pontos fixos
2. Linearização do sistema: Cálculo da Matriz Jacobiana
3. Autovalores da Matriz Jacobiana em torno de cada ponto fixo

1. Cálculo dos pontos fixos

$$\dot{P}(t) = 0$$

$$\dot{Z}(t) = 0$$

Quais destes pontos é solução do sistema acima?

$$() (P, Z) = (0, 0)$$

$$() (P, Z) = (\tilde{P}, 0)$$

$$() (P, Z) = (0, \tilde{Z})$$

$$() (P, Z) = (\hat{P}, \hat{Z})$$



INCT
IN-TREE
Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia em
Estudos Interdisciplinares e Transdisciplinares
em Ecologia e Evolução

**ESCOLA DE
BIOMATEMÁTICA
DA BAHIA**

Predador- Presa: Pearl-Verhulst e Holling tipo II

$$\dot{P}(t) = rP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{k} \right) - \alpha \frac{P(t)}{1 + P(t)} Z(t)$$

Resposta funcional de predação
Holling tipo II

$$\dot{Z}(t) = \delta \alpha \frac{P(t)}{1 + P(t)} Z(t) - dZ(t)$$

Crescimento Logístico: Pearl-Verhulst

Variáveis dependentes:

P - presa

Z – predador

Variável independente:

t - tempo

Parâmetros

r – taxa de crescimento

δ – taxa de reprodução de predadores por presa consumida

α – coeficiente de predação

d – taxa de mortalidade do predador

k – capacidade de suporte do sistema

Passos:

1. Cálculo dos pontos fixos
2. Linearização do sistema: Cálculo da Matriz Jacobiana
3. Autovalores da Matriz Jacobiana em torno de cada ponto fixo

1. Cálculo dos pontos fixos

Quais destes pontos é solução do sistema acima?

() (P,Z)=(0,0)

() (P,Z)=($\tilde{P}$,0)

() (P,Z)=(0, $\tilde{Z}$)

() (P,Z)=($\hat{P}$, $\hat{Z}$)

2. Linearização do sistema

$$\begin{cases} \dot{P} = f(P, Z) \\ \dot{Z} = g(P, Z) \end{cases} \quad \text{Sistema não linear}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} P \\ Z \end{bmatrix} \quad \text{Sistema não Linear, onde J é a matriz jacobiana do sistema}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial P} & \frac{\partial f}{\partial Z} \\ \frac{\partial g}{\partial P} & \frac{\partial g}{\partial Z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} P \\ Z \end{bmatrix} \quad \text{Sistema Linear, onde M é a matriz jacobiana calculada em torno de um}$$

ponto fixo, (P^*, Z^*)

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial P} & \frac{\partial f}{\partial Z} \\ \frac{\partial g}{\partial P} & \frac{\partial g}{\partial Z} \end{pmatrix}_{\substack{P=P^* \\ Z=Z^*}}$$

Calcule a matriz jacobiana do sistema J:

3. Calcule a matriz para cada um dos pontos fixos:

$(P, Z) =$

$(P, Z) =$



INCT
IN-TREE
Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia em
Estudos Interdisciplinares e Transdisciplinares
em Ecologia e Evolução

ESCOLA DE BIOMATEMÁTICA DA BAHIA

Calcule os autovalores λ_1 e λ_2 das matrizes: Calcule o determinante $\det(M-\lambda I)=0$

$(P, Z) =$

$(P, Z) =$

Classifique os pontos segundo classificação de Poincaré em duas dimensões :

Autovalores	Sinal da parte real	Representação no plano complexo	Ponto fixo	Exemplo	Estabilidade
$\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 < 0$		nó (hiperbólico)		assintoticamente estável
	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 > 0$		nó (hiperbólico)		instável
	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$		sela (hiperbólico)		instável
$\lambda_1 = \lambda_2^*$ (complexos conjugados)	positiva		foco (hiperbólico)		instável
	negativa		foco (hiperbólico)		assintoticamente estável
	nula		centro (elíptico) CASO DEGENERADO		estável (não assintoticamente)
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$	nula	CASOS DEGENERADOS (elípticos)			
$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \in \mathbb{R}$	positiva		"inflected node" (hiperbólico)		instável
	negativa		"inflected node" (hiperbólico)		assintoticamente estável

Bibliografia:

- Caos uma Introdução. Nelson Ferrara E Carmen do Prado, Editora Edgard Blücher
- Sistemas Dinâmicos. Luiz Henrique Alves Monteiro, Editora editora livraria da fisica