



Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Espécies
Interagentes

Predação

Lotka-Volterra

Para além de
Lotka-Volterra

Mais além
ainda de
Lotka-Volterra

Fim

Escola de Biomatemática da Bahia

Roberto André Kraenkel, *IFT*

Aula II

UFBA, 2024



A aula de hoje

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Espécies
Interagentes

Predação

Lotka-Volterra

Para além de
Lotka-Volterra

Mais além
ainda de
Lotka-Volterra

Fim

- 1 Espécies Interagentes
- 2 Predação
- 3 Lotka-Volterra
- 4 Para além de Lotka-Volterra
- 5 Mais além ainda de Lotka-Volterra
- 6 Fim



Espécies Interagentes

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Espécies
Interagentes

Predação

Lotka-Volterra

Para além de
Lotka-Volterra

Mais além
ainda de
Lotka-Volterra

Fim

- Vimos que populações (sejam animais, vegetais, insetos, bactérias, etc) vivem em cadeias de interações tróficas que podem ser bastante complexas.
- Algumas vezes, certas espécies podem se comportar como populações não interagentes. Outras vezes, não é assim. Vejamos agora os casos mais simples de interações entre espécies.
- Vamos começar considerando apenas duas espécies.



Tipos de interação inter-específicas

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Espécies
Interagentes

Predação

Lotka-Volterra

Para além de
Lotka-Volterra

Mais além
ainda de
Lotka-Volterra

Fim

- Há **três** tipos essenciais de interação entre duas espécies:
- **PREDACÃO**: a presença de uma espécie **(A)** é prejudicial para a espécie **(B)**, enquanto que a presença de **(B)** é favorável para **(A)**. A espécie **(A)** é o predador, e **(B)** é a sua presa.
- **COMPETIÇÃO**: a presença de **(A)** é prejudicial a **(B)** e vice-versa.
- **MUTUALISMO**: a presença de **(A)** é favorável a **(B)** e vice-versa.

Nota bene

A rigor, há ainda o **amensalismo** (que é negativo para uma espécie e neutro para a outra) e o **comensalismo** (que é positivo para uma espécie e neutro para a outra). Isso sem falar no **neutralismo**.



Predação

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Espécies
Interagentes

Predação

Lotka-Volterra

Para além de
Lotka-Volterra

Mais além
ainda de
Lotka-Volterra

Fim

- A **predação** é uma das interações entre espécies das mais universais.
- Ecologicamente, é a interação mais direta.
- Vamos agora ver um modelo matemático simples para descrevê-la.
- Chama-se de modelo de *Lotka-Volterra*.



Lotka e Volterra

Muoiono gl'imperi, ma i teoremi d'Euclide conservano eterna giovinezza (Volterra)

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Espécies
Interagentes

Predação

Lotka-Volterra

Para além de
Lotka-Volterra

Mais além
ainda de
Lotka-Volterra

Fim



Vito Volterra (1860-1940), matemático italiano, chegou à sua equação instigado pelo seu futuro genro, Umberto d'Ancona, que buscava explicar porque observavam-se oscilações na quantidade de peixes predadores capturados em certos portos do Mar Adriático.



Alfred Lotka (1880-1949), matemático e químico americano, nascido na Ucrânia, buscava aplicar os princípios da física à biologia, muito ao estilo da físico-química. Publicou seus resultados em um livro chamado "Elements of Physical Biology", dedicado à memória de Poynting. Seu trabalho foi independente do de Volterra.



As equações de Lotka-Volterra

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Espécies
Interagentes

Predação

Lotka-Volterra

Para além de
Lotka-Volterra

Mais além
ainda de
Lotka-Volterra

Fim

Seja

- $N(t)$ o número de predadores,
- $V(t)$ o número de presas.

Nas transparências seguintes, a , b , c e d serão constantes **positivas**
O número de presas deve crescer quando não há predadores:

$$\frac{dV}{dt} = aV$$

Mas a presença de predadores deve diminuir a taxa de crescimento das presas:

$$\frac{dV}{dt} = V(a - bP)$$



Lotka-Volterra: análise

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Espécies
Interagentes

Predação

Lotka-Volterra

Para além de
Lotka-Volterra

Mais além
ainda de
Lotka-Volterra

Fim

- Temos **lindas** equações.
- Mas não a sua **solução**.
- E as equações não tem soluções em termos de funções elementares.
- QUE FAZER?
- Dois caminhos
 - Integração numérica das equações. **O que é isso?**
 - Análise qualitativa. **O que é isso?**



Lotka-Volterra: análise qualitativa

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Espécies
Interagentes

Predação

Lotka-Volterra

Para além de
Lotka-Volterra

Mais além
ainda de
Lotka-Volterra

Fim

- Voltemos às nossas equações :

$$\frac{dV}{dt} = V(a - bP)$$

$$\frac{dP}{dt} = P(cV - d)$$

- Divida a segunda pela primeira:

$$\frac{dP}{dV} = \frac{P(cV - d)}{V(a - bP)}$$

- Assim podemos obter:

$$\frac{dP(a - bP)}{P} = \frac{dV(cV - d)}{V}$$



Continuação

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Espécies
Interagentes

Predação

Lotka-Volterra

Para além de
Lotka-Volterra

Mais além
ainda de
Lotka-Volterra

Fim



$$\frac{dP(a - bP)}{P} = \frac{dV(cV - d)}{V}$$

- Integramos de ambos os lados:

$$a \ln P - bP = cV - d \ln V + H$$

onde H é uma constante.

- Ou seja

$$c\mathbf{V(t)} - b\mathbf{P(t)} + a \ln \mathbf{P(t)} + d \ln \mathbf{V(t)} = H$$

- A equação acima é uma relação que deve ser obedecida por todas as soluções do sistema de Lotka-Volterra.
- Para um cada valor de H podemos traçar no plano $P \times V$ o lugar geométrico dos pontos que obedecem a equação acima. Façamo-lo!.



Trajetoórias no espaço de fases

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Espécies
Interagentes

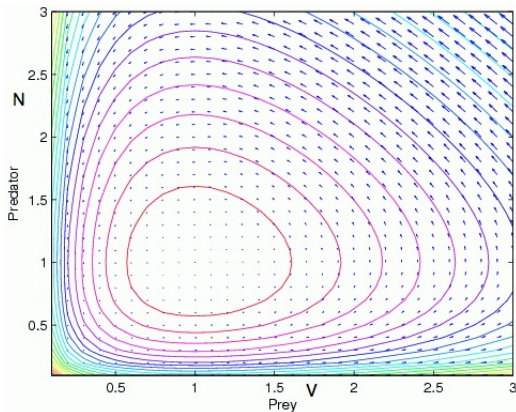
Predação

Lotka-Volterra

Para além de
Lotka-Volterra

Mais além
ainda de
Lotka-Volterra

Fim



$$\frac{dV}{dt} = V(a - bP)$$

$$\frac{dP}{dt} = P(cV - d)$$

As trajetórias no espaço de fases da equação de Lotka-Volterra, com $a = b = c = d = 1$. Cada curva corresponde a um valor de H . As curvas obedecem à:

$$c\mathbf{V(t)} - b\mathbf{P(t)} + a \ln \mathbf{P(t)} + d \ln \mathbf{V(t)} = H$$



Lotka-Volterra: oscilações

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Espécies
Interagentes

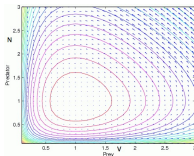
Predação

Lotka-Volterra

Para além de
Lotka-Volterra

Mais além
ainda de
Lotka-Volterra

Fim



- Chamamos o plano de $P \times V$ de plano de fases, ou mais comumente, de **espaço de fases**.
- As curvas, chamamo-las de **trajetórias** ou de **órbitas**.
- No caso, temos *órbitas fechadas*.
- O que representam?

- Tome um ponto no espaço de fase.
- Ele representa um certo número de presas e predadores.
- Por este ponto passa uma curva. Repare nela.
- Com o correr do tempo, estas populações evoluem percorrendo a curva no espaço de fase.
- Depois de um certo tempo, voltarão à situação inicial.
- O sistema é periódico.



Oscilações II

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Espécies
Interagentes

Predação

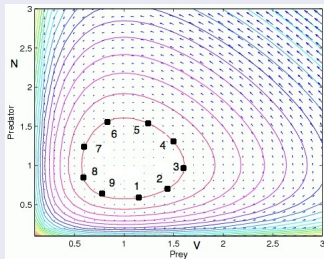
Lotka-Volterra

Para além de
Lotka-Volterra

Mais além
ainda de
Lotka-Volterra

Fim

- Muio bem, o sistema é **periódico**.
- Vamos reparar mais de perto.
- Tome um ponto no plano $P \times V$ e siga-o no tempo:



- Vamos ver como evolui a variável V (as presas).
- de 1 até 3 seu número aumenta.
- de 3 até 8 seu número diminui.
- e de 8 até 3 aumenta de novo
- e assim por diante.

O NÚMERO DE PRESAS OSCILA PERIÓDICAMENTE NO TEMPO.

O DE PREDADORES TAMBÉM.



E as soluções ?

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Espécies
Interagentes

Predação

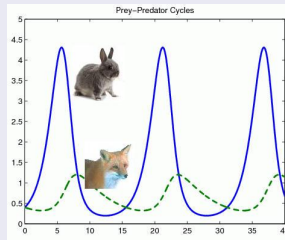
Lotka-Volterra

Para além de
Lotka-Volterra

Mais além
ainda de
Lotka-Volterra

Fim

- Até aqui vimos como as soluções das Equações de Lotka-Volterra se comportam **qualitativamente**.
- Já é bastante: preveem que o sistema “predador-presa” apresenta **oscilações periódicas** nas populações das espécies.
- Mas, e as **SOLUÇÕES ?**. *The real thing!*.
- Bem, podemos mostrar um gráfico delas. De onde vem esse gráfico? Integração numérica.
- Aqui está:





Mais sobre Lotka-Volterra

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Espécies
Interagentes

Predação

Lotka-Volterra

Para além de
Lotka-Volterra

Mais além
ainda de
Lotka-Volterra

Fim

Em palavras...

- As equações de Lotka-Volterra nos dizem:
 - Seja um número **pequeno** de predadores e um certo número de presas
 - Com disponibilidade de presas, o número de predadores vai **aumentando**
 - As presas, mais atacadas, tem menor taxa de crescimento. Depois de um certo tempo, começam a **diminuir**.
 - Após um certo tempo, o predadores atingem o seu **máximo**, e por falta de comida começam a **diminuir** também.
 - Depois de alcançarem seu número **mínimo**, as presas começam a se **recuperar**, pois o número de predadores já é menor.
 - e assim por diante....
- Faz sentido!
- **Será verdade?**



O mundo real

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Espécies
Interagentes

Predação

Lotka-Volterra

Para além de
Lotka-Volterra

Mais além
ainda de
Lotka-Volterra

Fim

- A equação de Lotka-Volterra descreve situações reais?
- Em parte.
- Ela contém algumas elementos claramente irrealistas:
 - O crescimento das presas na ausência de predadores é **exponencial** e não **logístico**. Não contém mecanismo de saturação .
 - Mas isto é fácil concertar. A equação resultante continua tendo soluções oscilantes. **Beleza!**
 - Por outro lado, a taxa de crescimento do nosso predador é **$(cV - d)$** . Quanto maior **V** , maior a taxa de crescimento. Nosso predador é muito voraz!! Seria natural supor que a taxa de crescimento também se sature. Um efeito de **saciedade** ou **incapacidade de caçar mais que uma certa quantidade de presas**.
 - Equações levando isto em conta podem ser escritas.
- De uma forma geral, continuamos tendo oscilações .
- De modo que, podemos tirar da equação de Lotka-Volterra o seguinte: apesar de ser um modelo sobressimplificado da dinâmica de predadores e presas, ela captura uma feição geral, que é a existência de **oscilações** , ou em outras palavras, de **periodicidade**.



Mais além ainda de Lotka-Volterra

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Espécies
Interagentes

Predação

Lotka-Volterra

Para além de
Lotka-Volterra

Mais além
ainda de
Lotka-Volterra

Fim

- Evidentemente, verdadeiras interações ocorrem em cadeias de muitas espécies que têm relações de predação , competição e simbiose.
- Exemplo simples:
 - Do que se alimenta a presa?
 - Nas equações de Lotka-Volterra isso não está sendo levado em conta.
 - Se o suprimento de alimentos da presa for razoavelmente constante, então uma dinâmica de Lotka-Volterra (e suas generalizações mencionada) pode ser um bom modelo.
 - Mas podemos muito bem não poder “separar a dinâmica da presa de seu alimento”. Neste caso teremos que recorrer a modelos com mais espécies.
- Em suma, as equações de Lotka-Volterra são antes um ponto de partida do que um ponto de chegada na construção de modelos matemáticos envolvendo predação .



Uma última observação

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Espécies
Interagentes

Predação

Lotka-Volterra

Para além de
Lotka-Volterra

Mais além
ainda de
Lotka-Volterra

Fim

Relação hospedeiro-parasitóide

- Relacionado à interação **predador-presa**, está a de um parasita com o seu hospedeiro.
- O parasita faz as vezes de predador, e o hospedeiro é análogo à presa.
- No entanto, a maioria dos parasitas tem ciclos anuais bem definidos
- As gerações pouco se sobrepõe.
- Neste caso, deveremos construir modelos “em tempo discreto”.



O que devo absolutamente lembrar

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Espécies
Interagentes

Predação

Lotka-Volterra

Para além de
Lotka-Volterra

Mais além
ainda de
Lotka-Volterra

Fim

- Relações entre duas espécies servem de estudo básico, como peças constitutivas de redes maiores
- De forma geral podem ser divididas em três tipos:
 - **predador-presa;**
 - **competição ;**
 - **simbiose.**
- Relações predador-presa tendem a mostrar comportamento oscilatório.
- Mas note que nem toda oscilação advém de uma interação do tipo predador-presa.

OBRIGADO PELA SUA ATENÇÃO .



Referências

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Espécies
Interagentes

Predação

Lotka-Volterra

Para além de
Lotka-Volterra

Mais além
ainda de
Lotka-Volterra

Fim

- J.D. Murray: *Mathematical Biology I* (Springer, 2002)
- G.E. Hutchinson: *An Introduction to Population Ecology* (Yale, 1978).
- N.F. Britton: *Essential Mathematical Biology* (Springer, 2003).
- T.J. Case: *An Illustrated Guide to Theoretical Ecology* (Oxford, 2000).
- R. May e A. McLean: *Theoretical Ecology*, (Oxford, 2007).
- N.J. Gotelli: *A Primer of Ecology* (Sinauer, 2001).

obrigado pela atenção