



Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escalas
Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia

Escola de Biomatemática da Bahia

Roberto André Kraenkel, *IFT*

Aula I

UFBA, 2024



A aula de hoje

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escalas

Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia

- 1** Populações
- 2** Modelos Simples I: Malthus
- 3** Modelos Simples II: a logística
- 4** Generalizações
- 5** Comentários
 - Escalas
 - Espécies Não-Interagentes
- 6** Bibliografia



Populações

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escala
Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia

- Nosso conceito primitivo será o de uma população.
 - Trata-se de um grupo de organismos (plantas, animais,...) composto por indivíduos com comportamento *dinâmico equivalente*.
 - Note: vamos tratar de **populações** e **não** de **indivíduos**.
- Populações crescem ou diminuem por ganharem ou perderem indivíduos.
- O crescimento ou decréscimo pode se dar por **nascimento, morte, imigração ou emigração**.

O curso trata de modelar a dinâmica de populações. Como elas aumentam e diminuem no tempo, como elas se distribuem pelo espaço.



Modelos, leis, teorias..

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escalas

Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia

Leis

- Estamos interessados em estabelecer leis que rejam como populações mudam no tempo e no espaço.
- Começemos primeiramente nos restringindo a buscar leis sobre as mudanças das populações no tempo. Chamamo-las de dinâmicas.
- *Primo*: vamos descrever uma população pelo número de indivíduos que a compõe.
 - Temos o que chamamos de uma população não-estruturada;
 - em outras instâncias encontraremos populações com estrutura de idade, tamanho, gênero, etc...
- *Secondo* : precisamos descrever a taxa variação temporal da população. Para tal usaremos derivadas.
- *Terzo* : por outro lado, precisamos dizer o que faz com que as populações cresçam ou decresçam. Quais processos biológicos?
 - Estes processos biológicos precisam ser traduzidos em linguagem matemática.

Ao igualarmos taxas de variação, por um lado, e a tradução matemática dos processos biológicos que gera mestas variações do outro lado, teremos equações que determinam a dinâmica da população.



Modelos Simples I: Malthus

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escala

Especies
Não-Interagentes

Bibliografia



Figura: Thomas Malthus, *circa* 1830

A lei mais Simples

- A lei mais simples regendo a evolução temporal de uma população:



$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)$$



Crescimento Exponencial

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escala

Especies
Não-Interagentes

Bibliografia

A solução

A solução da equação malthusiana é:

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

- A equação prevê o **crescimento exponencial da população no tempo**.
- Será verdade?



Crescimento Exponencial

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escalas
Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia

- Evidentemente, a previsão de crescimento exponencial não pode ser verdade de forma absoluta, pois teríamos populações enormes depois de um certo tempo (digamos, ocupando um espaço maior que a Terra...).
- Mas, nos estágios iniciais de crescimento de uma população podemos ter crescimento exponencial.
- Em outras palavras: quando a população não é muito grande, a lei malthusiana deve valer. Quando a população aumenta muito, *algo* deve conter a taxa de crescimento. Já veremos o que mais adiante.
- Primeiro, alguns exemplos.



Exemplos

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escalas

Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia

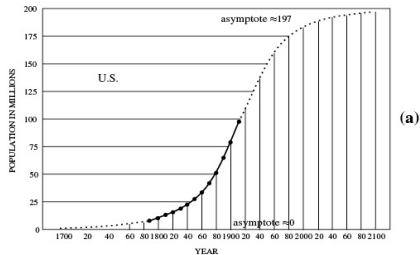


Figura: A população dos E.U.A. Até 1920, o crescimento da população é bem aproximado por uma exponencial. Depois, a taxa de crescimento diminui.





Alguns poréns

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escala
Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia

- De forma geral vimos que o crescimento exponencial de uma população sofre uma saturação.
- Mas não nos iludamos! O mundo tem coisas muito mais complexas que crescimento e sua saturação!
- Apenas mantenhamos na nossa mente que há padrões de evolução temporal como os a seguir:



Alguns poréns

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escala

Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia

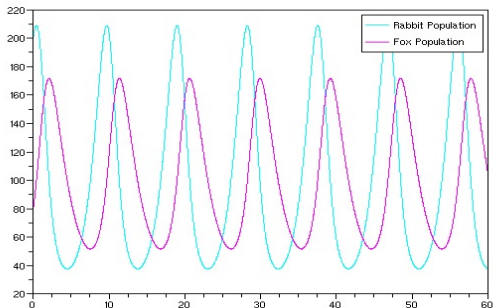


Figura: População de raposas e coelhos num parque nacional americano.

⇒ Não nos esqueçamos deste exemplo!.



Modelos Simples II: equação logística

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escala

Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia

- A forma mais simples de incluir um termo de saturação do crescimento é modificar a equação malthusiana :

- $$\frac{dN}{dt} = rN - bN^2 \equiv rN(1 - N/K)$$

- O termo $-bN^2$ é sempre negativo (assumimos $b > 0$), $\Rightarrow$ tende a fazer $\frac{dN}{dt}$ diminuir.
- Para $N/K \ll 1$, podemos fazer $1 - N/K \sim 1$ e recuperamos a equação mathusiana.
- Qual será a solução desta equação?
- A propósito, esta equação é chamada de **logística**, ou de **Verhulst**.



Equação Logística

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escalas

Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia



Figura: Pierre-François Verhulst, introdutor da equação logística em 1838: “*Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement*”. Ao seu lado, Raymond Pearl, que foi o redescobridor da equação e seu grande promotor.



Solução da Equação Logística

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escala
Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia

- Podemos facilmente resolver a equação logística
 $\frac{dN}{dt} = rN(1 - N/K)$.
- Basta fazer $dt = dN / (rN(1 - n/K))$, integrar e obter:

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{[K + N_0(e^{rt} - 1)]}$$

- Eis aqui um gráfico da solução para diversos valores de N_0 :



Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escala
Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia

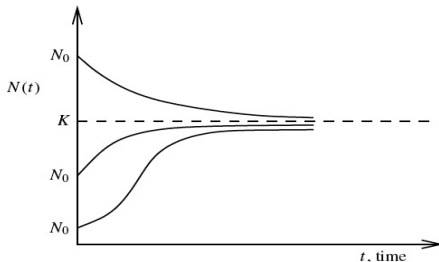


Figura: Evolução temporal de uma população obedecendo a equação logística. Cada curva corresponde a uma diferente condição inicial. Vê-se que não importa qual condição inicial, para $t \rightarrow \infty$, teremos $N \rightarrow K$



Em outras palavras...

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escala
Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia

- A equação

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - N/K)$$

tem dois pontos fixos:

- $N = 0$ e
 - $N = K$,
- sendo primeiro instável e o segundo estável.
 - Ou ainda: K é um atrator.



Mais sobre a equação logística

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escalas
Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia

- O termo quadrático (rN^2/K) na equação logística

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - N/K),$$

modela a competição entre os indivíduos da população por recursos vitais.

- Exemplo:
 - Espaço,
 - Alimentos.
- Chamamos esta competição de *intra-específica*.



Equação logística

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

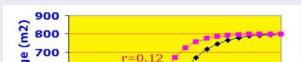
Escalas
Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia

Num lago com vitórias régias, evidentemente teremos competição por espaço quando chegarmos próximos da capacidade de suporte do lago:



A mesma coisa acontece com a cobertura por flores numa plantação em uma área restrita:





Nomenclatura

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escala
Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia

- A constante K que aparece na equação logística,

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - N/K)$$

é usualmente conhecida por *capacidade de suporte* do meio.

- Como vimos, a população tende ao valor limite K para grandes tempos.



Glória e Miséria da Equação Logística

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escala
Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia

Glórias

- Ela é simples e solúvel.
- Ela permite introduzir o conceito de capacidade de suporte.
- ela aproxima bem alguns dos fenômenos observados na natureza.

Misérias

- Ela é simples demais.
- Muito da dinâmica que se observa não é compatível com ela.

Por que eu devo gostar da Equação Logística

Ela é um modelo mínimo o qual pode servir de base a generalizações e modificações.



Generalizações

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escalas
Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia

- Uma forma de ir além da equação logística é tomar:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \mathcal{F}(N)$$

onde $\mathcal{F}$ é uma função dada de N .

- Alguns exemplos seriam:

- $\mathcal{F}(N) = rN(1 - N/K) - \frac{BN^2}{(A^2 + N^2)}$
- $\mathcal{F}(N) = -aN + bN^2 - cN^3$
- $\mathcal{F}(N) = L - rN + s \frac{N^q}{m^q + N^q}$



Generalizações

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escalas
Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia

- De uma forma geral, para estudar estas generalizações, não necessariamente resolvemos a equação diferencial.
- Recorremos antes a uma análise qualitativa:
 - Procuramos os *pontos fixos*, N^* , dados por $\mathcal{F}(N^*) = 0$.
 - Em posse de N^* determinamos a sua estabilidade.
 - Tente fazer este exercício para as funções da transparência anterior.
- Desta forma podemos ter uma visão *qualitativa* da dinâmica.



Comentários I

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escala

Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia

- A equação malthusiana introduziu um parâmetro r , e que tem dimensões de tempo^{-1} .
 - Ou seja, r^{-1} define uma escala de tempo.
- A equação logística utiliza igualmente um parâmetro adicional, K .
 - K define uma escala para o tamanho das populações.
- Escalas de tempo e espaço são importantes.
- Devemos ter sempre em mente que a modelagem de uma situação é válida em certas escalas.
- Vejamos um exemplo.



Comentários I: População humana

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escalas

Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia

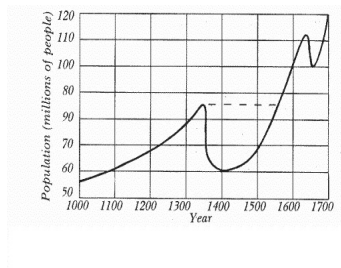
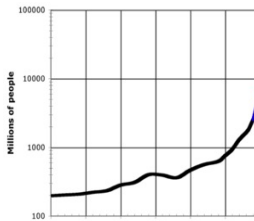


Figura: População da Europa entre 1000 e 1700





Comentários II

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escalas

Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia

- A visão até aqui desenvolvida considera uma população independentemente das outras.
- Sabemos, no entanto, que as mais diversas espécies vivem em redes interagentes
 - Animais competem por alimento
 - Espécies se alimentam umas das outras
 - Indivíduos passam de uma classe para outra (susceptível, infectado, recuperado)
- Em suma: “*a quantidade de ratos depende da quantidade de gatos que depende da quantidade de cachorros, que...*”.
- Tais redes podem ser bastante complicadas.



Rede trófica de animais no ártico

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

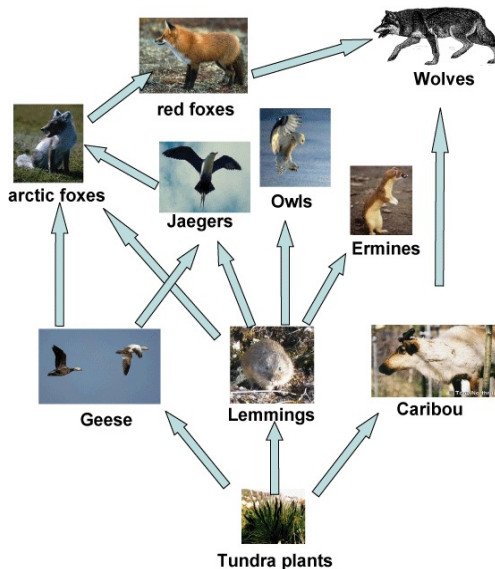
Generalizações

Comentários

Escalas

Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia





Comentários II

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escalas

Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia

Para que servem os modelos que estudamos?

- Diversas populações têm uma dinâmica desvinculada das demais. Dependem de fatores limitantes (alimento, espaço), mas estes fatores não são diretamente afetados pela população.
 - Se tivermos, por exemplo, uma espécie (A) que se alimenta de muitas outras.
 - O acoplamento desta espécie com cada uma das suas presas será fraco
 - As mudanças da população predada influem pouco na população predadora.
 - Se ao mesmo tempo (A) não for presa exclusiva de algum predador, então, (A) se comporta de efetivamente como uma espécie não-acoplada.



Comentários II: exemplo

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escala

Espécies
Não-Interagentes

Bibliografia

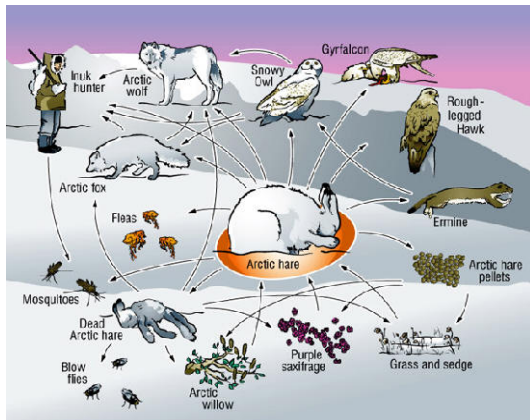


Figura: Rede trófica simplificada na região ártica

O lobo é um predador generalista mas é uma presa específica (do homem).



Bibliografia

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Populações

Modelos
Simples I:
Malthus

Modelos
Simples II: a
logística

Generalizações

Comentários

Escala

Especies
Não-Interagentes

Bibliografia

Bibliografia para este capítulo

- *Mathematical Biology I*, por **J.D. Murray** (Springer, Berlin, 2002).
- *Essential Mathematical Biology*, por **N.F. Britton** (Springer, Berlin, 2003).
- *An Introduction to Population Ecology*, por **G.E. Hutchinson**(Yale Univ. Press, 1978).
- *An Illustrated Guide to Theoretical Ecology*, por **T.J. Case** (Oxford, 2001).
- *A Primer of Ecology*, por **N.J. Gotelli** (Sinauer, 2001).
- *Elements of Mathematical Ecology*, por **M. Kot** (Cambridge Univ. Press, 2001).

obrigado pela atenção