

Introdução à análise de estabilidade e bifurcação



IV Escola de Inverno de Física
Programa de Pós-Graduação em Física
25 a 29 de julho de 2011 - Instituto de Física da UFBA - Salvador - Bahia

Escrito em $\text{\LaTeX}$ (Beamer)

Outline

- Lotka-Volterra
- Logistico
- Logistico e Holling
- Rosenzweig-MacArthur model (RMA)

Fluxo da energia solar: Modelos

N
 $\Downarrow$
 P
 $\Downarrow$
 Z
 $\Downarrow$
 F

Fluxo da energia solar: Modelos

Crescimento exponencial

$$\dot{P} = (b - d)P$$

$$P(t) = P_0 e^{(b-d)t}$$

N

↓

P

↓

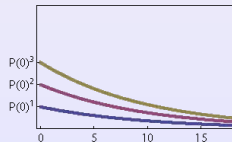
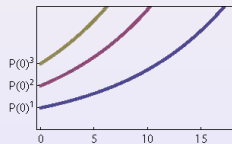
Z

↓

F

- se $b > d$ a população cresce exponencialmente

- se $b < d$ a população se extingue



Fluxo da energia solar: Modelos

Crescimento logístico

$$\begin{cases} \dot{N} = -\alpha bPN \\ \dot{P} = bPN \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{N} + \alpha \dot{P} = 0 \\ N + \alpha P = cte \end{cases}$$

N

↓

P

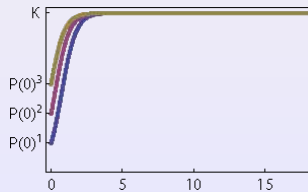
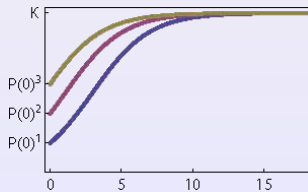
↓

Z

↓

F

$$\dot{P} = r\left(1 - \frac{P}{K}\right)P$$



Fluxo da energia solar: Modelos

Ajuste da equação logística de forma a obter N e P quase constante, permitindo uma colheita a taxa constante. Introdução do fluxo.

N

↓

P

↓

Z

↓

F

Quemostato

$$\begin{cases} \dot{N} = -\alpha k(N)P - F \frac{N}{V} + F \frac{N_0}{V} \\ \dot{P} = k(N)P - F \frac{P}{V} \end{cases} \implies \begin{cases} k(N) = a \frac{N}{b+N} \\ \frac{F}{V} = D \\ N_0 = I \end{cases}$$

$$\dot{N} = D(I - N) - P \frac{a_1 N}{b_1 + N},$$

$$\dot{P} = e_1 \frac{a_1 N}{b_1 + N} P - D f_1 P.$$

Fluxo da energia solar: Modelos

N
 $\Downarrow$
 P
 $\Downarrow$
 Z
 $\Downarrow$
 F

Lotka-volterra model

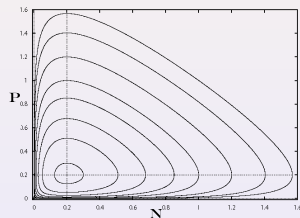
$$\dot{P} = rP - \alpha PZ$$

$$\dot{Z} = \delta \alpha PZ - d_2 Z$$

Presa auto-limitada:

$$\dot{P} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - \alpha PZ$$

$$\dot{Z} = \delta \alpha PZ - d_2 Z$$



Fluxo da energia solar: Modelos

 N  P  Z  F

Fluxo da energia solar: Modelos

 N  P  Z  F

Fluxo da energia solar: Modelos

 N  P  Z  F

Predador-Presa

Lotka-Volterra: Predador-Presa

$$\begin{aligned}\dot{P} &= rP - \alpha PZ \\ \dot{Z} &= \delta \alpha PZ - dZ\end{aligned}$$

Cálculo dos pontos fixos:

$$\begin{aligned}\dot{P} = 0 &= P(r - \alpha Z) \\ \dot{Z} = 0 &= Z(\delta \alpha P - d)\end{aligned}$$

População nula : $P = 0$ e $Z = 0$

População não nula: $P = \frac{d}{\delta \alpha}$ e $Z = \frac{r}{\alpha}$

Estabilidade dos pontos fixos:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{d\dot{P}}{dP} & \frac{d\dot{P}}{dZ} \\ \frac{d\dot{Z}}{dP} & \frac{d\dot{Z}}{dZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - \alpha Z & -\alpha P \\ \delta \alpha Z & \delta \alpha P - d \end{pmatrix}$$

ponto $(P, Z) = (0, 0)$

$$M = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}[M - \lambda I] = (\lambda - r)(\lambda + d) = 0$$

Autovalores: $\lambda = r$ e $\lambda = -d$

ponto $(P, Z) = (\frac{d}{\delta \alpha}, \frac{r}{\alpha})$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha}{\delta} \\ \delta r & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}[M - \lambda I] = -\lambda^2 - rd = 0$$

Autovalores: $\lambda = \pm \sqrt{-rd}$

Predador-Presa:Logístico

Lotka-Volterra: Predador-Presa

$$\begin{aligned}\dot{P} &= rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - \alpha PZ \\ \dot{Z} &= \delta\alpha PZ - dZ\end{aligned}$$

ponto $(P, Z) = (0, 0)$

$$M = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

Autovalores: $\lambda = r$ e $\lambda = -d$

ponto $(P, Z) = (K, 0)$

$$M = \begin{pmatrix} -r & -K\alpha \\ 0 & -d + K\alpha\delta \end{pmatrix}$$

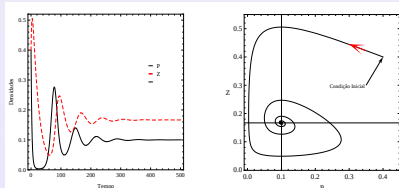
Autovalores: $\lambda = -r$ e $\lambda = -d + K\alpha\delta$

$$\alpha\delta K > d$$

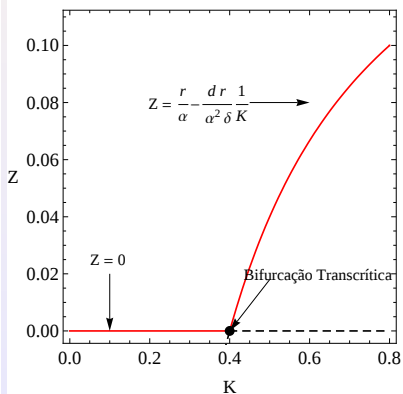
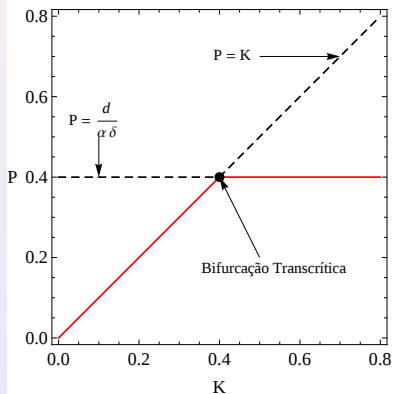
ponto $(P, Z) = \left(\frac{d}{\delta\alpha}, \frac{r(-d + \alpha\delta K)}{\alpha^2\delta K}\right)$

$$M = \begin{pmatrix} r\left(1 - \frac{d}{K\alpha\delta} - \frac{dr}{\frac{r(-d + K\alpha\delta)}{K\alpha}} - \frac{r(-d + K\alpha\delta)}{K\alpha\delta} \right) & -\frac{\alpha}{\delta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

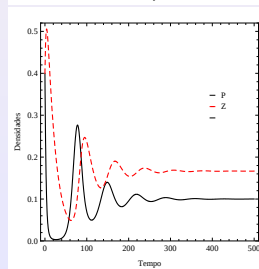
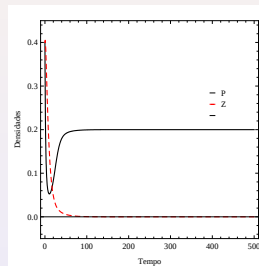
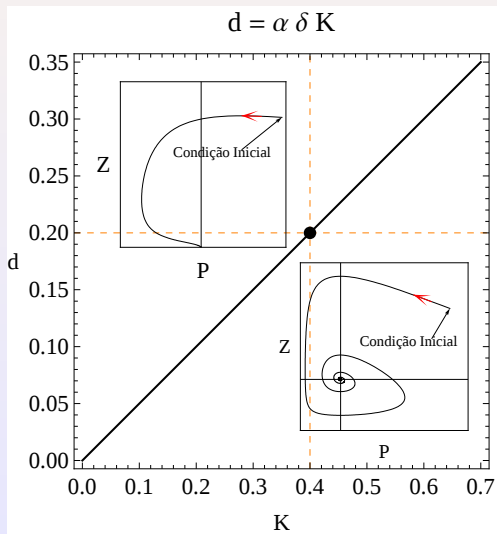
$$\text{Autovalores: } \lambda = \frac{-dr \pm \sqrt{dr} \sqrt{dr + 4K\alpha\delta(d - K\alpha\delta)}}{2K\alpha\delta}$$



Predador-Presa: Logístico



Predador-Presa: Logístico (Diagrama de Bifurcação a dois parâmetros)



Predador-Presa: Logístico com holling tipo 2

Lotka-Volterra: Predador-Presa

$$\dot{P} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - \alpha \frac{P}{1+P}Z$$

$$\dot{Z} = \delta\alpha \frac{P}{1+P}Z - dZ$$

ponto $(P, Z) = (0, 0)$

Autovalores: $\lambda = r$ e $\lambda = -d$

ponto $(P, Z) = (K, 0)$

Autovalores: $\lambda = -r$ e $\lambda = -d + \frac{k\alpha\delta}{1+K}$

$$\alpha\delta K > d$$

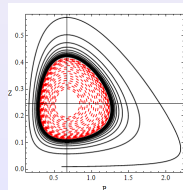
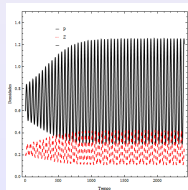
ponto $(P, Z) = \left(\frac{d}{\delta\alpha - d}, \frac{r(-d\delta + -dK\delta + \alpha\delta^2 K)}{k(d - \alpha\delta)^2}\right)$

Parte Real dos autovalores:

$$Re[\lambda] = \frac{-Krd^2 - rd^2 + Kr\alpha\delta d - r\alpha\delta d}{2(K\alpha^2\delta^2 - dK\alpha\delta)}$$

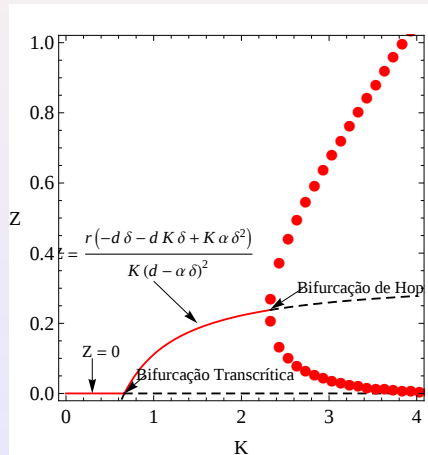
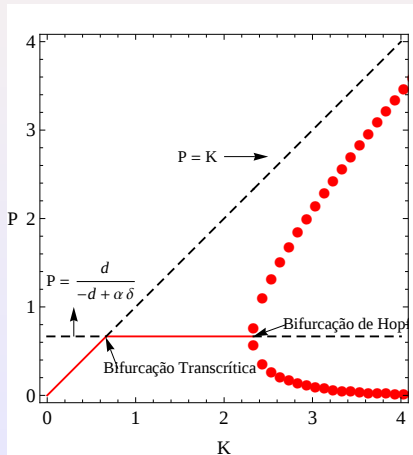
Bifurcação de Hopf: $Re[\lambda] = 0$

$$K \rightarrow \frac{-d - \alpha\delta}{d - \alpha\delta}$$



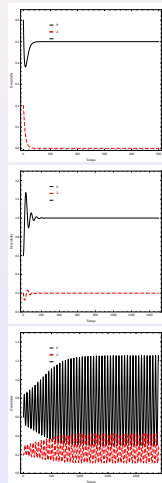
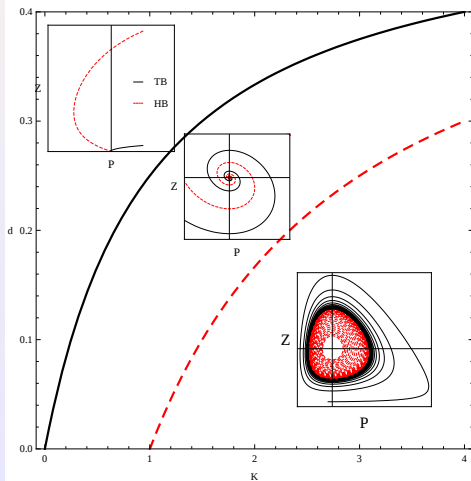
Predador-Presa: Logístico com holling tipo 2

Diagrama de Bifurcação



Predador-Presa: Logístico com holling tipo 2

Diagrama de Bifurcação a dois parâmetros



Rosenzweig-MacArthur model (RMA)

Cadeia alimentar tri-trófica com presa logística

- presa com crescimento logístico, x_1
- predador “Holling type II”, x_2
- predador principal “Holling type II”, x_3

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 \left[r \left(1 - \frac{x_1}{K} \right) - \frac{a_2 x_2}{b_2 + x_1} \right], \\ \dot{x}_2 &= x_2 \left[e_2 \frac{a_2 x_1}{b_2 + x_1} - \frac{a_3 x_3}{b_3 + x_2} - d_2 \right], \\ \dot{x}_3 &= x_3 \left[e_3 \frac{a_3 x_2}{b_3 + x_2} - d_3 \right].\end{aligned}\tag{1}$$

A seguinte condição

$$e_i a_i > d_i, i = 1, 2, 3.$$

isto “evita o caso onde o predador e o predador principal não podem sobreviver, mesmo quando seus recursos alimentícios são infinitamente abundantes”.

Existem três pontos fixos triviais

Extinção de todas as espécies: $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$

É sempre instável $\lambda_1 = r$, $\lambda_2 = -d_2$, $\lambda_3 = -d_3$

Segunda solução (presa-somente): $(x_1, x_2, x_3) = (K, 0, 0)$

É estável quando a terceira solução for negativa.

$$\lambda_1 = -r, \quad \lambda_2 = -d_3, \quad \lambda_3 = -d_2 + \frac{ka_2e_2}{k+b_2}; \quad d_2^{TB1} = \frac{a_2e_2}{(1+\frac{b_2}{k})}$$

Terceira Solução (presa-predador):

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{b_2d_2}{d_2 - a_2e_2}, \\ x_2 &= \frac{r(-Kb_2d_2e_2 - b_2^2d_2e_2 + Ka_2b_2e_2^2)}{K(d_2 - a_2e_2)^2}, \\ x_3 &= 0. \end{aligned}$$

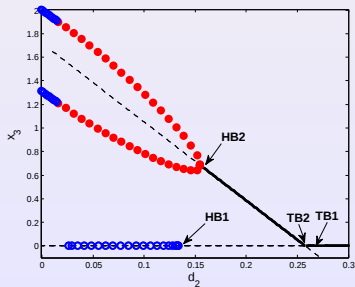
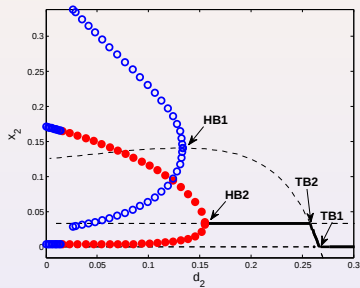
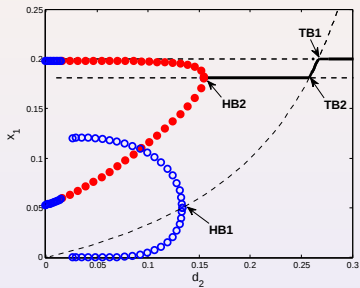
é positiva quando $a_2e_2 > d_2 \left(1 + \frac{b_2}{k}\right)$

$$Re(\lambda_{1,2}) = -kr d_2^2 - rb_2 d_2^2 + kra_2 d_2 e_2 - ra_2 b_2 e_2 d_2$$

Quando a parte real se anula
→ Hopf bifurcation .

$$d_2^{HB1} = \frac{a_2e_2(k-b_2)}{k+b_2}$$

$$d_3^{TB2} = \frac{e_3 a_3 x_2}{b_3 + x_2}$$



Quarto ponto fixo

Sem presas:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0, \\x_2 &= -\frac{b_3 d_3}{d_3 - a_3 e_3}, \\x_3 &= \frac{b_3 d_2 e_3}{d_3 - a_3 e_3}.\end{aligned}$$

Por causa de

$$e_i a_i > d_i, i = 1, 2, 3.$$

esta solução não pertence ao quadrante positivo, desta forma esta solução não é aceitável desde o ponto de vista biológico,

Soluções interiores

Quinta e sexta soluções (3-especies):

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{1}{2} \left(k - b_2 \pm \frac{\sqrt{r(d_3 - a_3 e_3)((r(k + b_2)^2 + 4ka_2 b_3)d_3 - ra_3(k + b_2)^2 e_3)}}{r(a_3 e_3 - d_3)} \right), \\
 x_2 &= \frac{b_3 d_3}{a_3 e_3 - d_3}, \\
 x_3 &= \frac{e_3}{2kd_3(d_3 - a_3 e_3)} [d_3(-rb_2(k + b_2)e_2 + 2kb_3(d_2 - a_2 e_2)) \\
 &\quad + ra_3 b_2(k + b_2)e_2 e_3 \pm \\
 &\quad b_2 e_2 \sqrt{r(d_3 - a_3 e_3)((r(k + b_2)^2 + 4ka_2 b_3)d_3 - ra_3(k + b_2)^2 e_3)}].
 \end{aligned}$$

Elas podem ser positivas ou negativas dependendo dos valores dos parâmetros.

Bifurcação Sela-Nó

$$d_3^{TB3} = \frac{ra_3 e_3 (k + b_2)^2}{r(k + b_2)^2 + 4ka_2 b_2} \quad (2)$$

Diagrama de bifurcação a dois parâmetros

