



Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Escola de Biomatemática da Bahia

Roberto André Kraenkel, *IFT*

Apontamentos de Cálculo Diferencial e Integral Parte II

UFBA, 2024



Sumário

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

1 Operações Inversas

2 Integral

3 Áreas

4 Densidades

5 Fim



Invertendo Operações

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Exemplos

- Vamos nos ocupar de *operações inversas*: aquelas que tem efeito inverso que uma outra operação.
- Tomemos por exemplo a operação: "elevar ao quadrado": ela pega um número e o eleva ao quadrado.
- Seja um número x . Chamemos o seu quadrado de y :
- $y = x^2$
- Qual é a operação inversa de "elevar ao quadrado"?
- $x = \sqrt{y} = y^{1/2}$
- É a operação que pega um número (y) e acha um outro (x), tal que "o quadrado desse número (x)" é o número inicial (y).
- Aplicar uma operação e em seguida a sua inversa resulta em uma identidade:
- Elevar ao um número x ao quadrado : $y = x^2$ e depois tirar a raiz $\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = x$ resultou no próprio x .



Invertendo Operações II

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Exemplos II

- Assim, temos que:
- A inversa de e^x é $\ln(x)$, pois $\ln(e^x) = x$.
- A inversa de "somar 5" é "subtrair 5", pois $x + 5 - 5 = x$.
- A inversa de "multiplicar por 2" é "dividir por 2", pois $(2x)/2 = x$.
- A inversa de $\sin(x)$ é o $\arcsin(x)$: o arco cujo seno é x .

E agora nos perguntamos qual é a inversa da operação de derivação.



A antiderivada

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Diferenciação e sua Inversa

- Lembremos da derivada.
- Temos uma **função**, $f(x)$.
- Podemos calcular a sua derivada $\frac{df}{dx}$.
- A sua derivada é uma nova função.
- Veja a analogia:
 - Elevar um número ao quadrado, nos fornece um novo número.
 - A operação anterior (chamada de potenciação) leva números em números.
 - E a sua inversa ("tirar a raiz"), também.
 - A operação "tomar a derivada de $f(x)$ "(chamada de diferenciação ou derivação) leva uma **função** em outra **função**.
 - Assim, a operação inversa da diferenciação tem que também levar uma **função** em outra **função**.
- Provisoriamente, chamemos esta operação de **antiderivada**.



A antiderivada II

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Um primeiro cálculo

- A antiderivada deve portanto "desfazer" a operação de derivar.
- Seja por exemplo

$$f(x) = x^2$$

- Vimos que neste caso

$$\frac{df}{dx} = 2x$$

- Assim, a antiderivada da função

$$g(x) = 2x$$

- é

$$x^2$$

pois x^2 é a função cuja derivada é $2x$.



A antiderivada II

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Notação e nomenclatura

- Você notou que ainda não introduzimos uma notação para a antiderivada
- Aqui vai:

A antiderivada da função $f(x)$ é denotada por $\int^x f(x)dx$

Assim, por exemplo:

$$\int^x (2x)dx = x^2$$

- Vamos agora dar um novo nome para a antiderivada: **integral indefinida**.
- Lê-se a expressão acima como : *a integral indefinida de $2x$ é x^2* .
 - O adjetivo indefinida é muitas vezes omitido. Adiante veremos que existe um outro objeto matemático chamado de *integral definida*.
 - Muitas vezes chama-se a integral indefinida de uma função de **primitiva**. Não usaremos esta nomenclatura extensamente aqui, mas é bom conhece-la. Assim, a primitiva de $2x$ é x^2 .



Integral Indefinida

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Somando constantes

- Voltemos ao exemplo acima

-

$$\int^x (2x)dx = x^2 \quad ,$$

pois $\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$

- Mas veja que

$$\frac{d(x^2 + K)}{dx} = 2x \quad ,$$

onde K é qualquer constante.

- Assim, podemos escrever que

$$\int^x (2x)dx = x^2 + K$$

Conclusão: Sempre podemos somar uma constante arbitrária ao resultado de uma integral indefinida.



Integral Indefinida II

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Alguns cálculos

- Vamos então obter algumas integrais indefinidas a partir de sua definição.
- A integral indefinida de uma função $f(x)$ é a uma outra função, $g(x)$, cuja derivada é $f(x)$.

■

$$\int^x x dx = \frac{x^2}{2} \quad \text{pois} \quad \frac{d(x^2/2)}{dx} = x$$

■

$$\int^x x^2 dx = \frac{x^3}{3} \quad \text{pois} \quad \frac{d(x^3/3)}{dx} = x^2$$

■

$$\int^x x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{pois} \quad \frac{d(x^{n+1}/(n+1))}{dx} = x^n$$

■

$$\int^x 5x dx = \frac{5x^2}{2} \quad \text{pois} \quad \frac{d(5x^2/2)}{dx} = 5x$$

onde ainda podemos somar uma constante a cada resultado.



Integral Indefinida III

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Alguns cálculos, *bis*

■

$$\int e^x dx = e^x \quad \text{pois} \quad \frac{de^x}{dx} = e^x$$

■

$$\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} \quad \text{pois} \quad \frac{d\frac{e^{2x}}{2}}{dx} = e^{2x}$$

■

$$\int e^{Kx} dx = \frac{e^{Kx}}{K} \quad \text{pois} \quad \frac{d\frac{e^{Kx}}{K}}{dx} = e^{Kx}$$

■

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) \quad \text{pois} \quad \frac{d\ln(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

aonde ainda podemos somar uma constante a cada resultado.



Integral Indefinida IV

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Alguns cálculos, *ter*

- $$\int^x \ln(x) dx = x(\ln(x) - 1) \quad \text{pois} \quad \frac{d[x(\ln(x) - 1)]}{dx} = \ln(x)$$
- $$\int^x \sin(x) dx = -\cos(x) \quad \text{pois} \quad \frac{d(-\cos(x))}{dx} = \sin(x)$$
- $$\int^x \sin(Kx) dx = \frac{-\cos(x)}{K} \quad \text{pois} \quad \frac{d(-\cos(x)/K)}{dx} = \sin(Kx)$$
- $$\int^x \cos(x) dx = \sin(x) \quad \text{pois} \quad \frac{d(\sin(x))}{dx} = \cos(x)$$

onde ainda podemos somar uma constante a cada resultado.



Integral Indefinida V

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Alguns cálculos, *quater*

Podemos continuar a nossa brincadeira invertendo tabelas de derivação:

função	Derivada
xe^x	$(x+1)e^x$
$\sin(x^2)$	$2x \cdot \cos(x^2)$
$x \cdot \sin(2x)$	$\sin(2x) + 4x \cos(2x)$

função	Integral
$(x+1)e^x$	xe^x
$2x \cdot \cos(x^2)$	$\sin(x^2)$
$\sin(2x) + 4x \cos(2x)$	$x \cdot \sin(2x)$

onde ainda podemos somar uma constante a cada resultado da integral acima.



Integral Indefinida VI

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Algumas regras

- O processo de integração não é tão simples quanto o de derivação.
- Muitas vezes recorremos a tabelas de integrais,
- Ou a softwares que tem capacidade de manipulação algébrica
- Por exemplo: Mathematica, Wolfram Alpha.
- Mas devemos ter em mente algumas regras simples:



Integral Indefinida VII

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Algumas regras, *bis*



$$\int^x dx = x$$

- Da própria definição de integral indefinida:

$$\int^x \frac{df}{dx} dx = f(x)$$



$$\int^x Af(x)dx = A \int^x f(x)dx$$

onde A é uma constante (uma função que não depende de x).



$$\int^x [f(x) + g(x)]dx = \int^x f(x)dx + \int^x g(x)dx$$

- Mas note que a integral do produto **não** é o produto das integrais.



Áreas

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Áreas

- Você se lembra que no fim de nossa discussão sobre derivadas demos uma interpretação para a derivada como sendo a inclinação da curva tangente ao gráfico da função que estamos derivando.
- A integral também pode ser interpretada geometricamente.
- Está relacionada à área debaixo de uma curva.
- Vejamos.



Áreas II

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

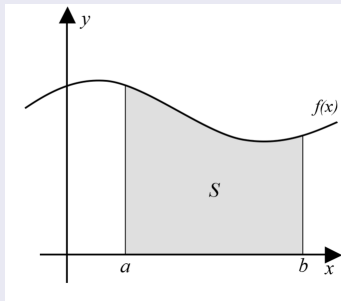
Integral

Áreas

Densidades

Fim

Área debaixo de uma curva



- Aí está o gráfico da função $f(x)$ e a área debaixo da curva entre os pontos a e b .
- Como podemos calculá-la?



Áreas III

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

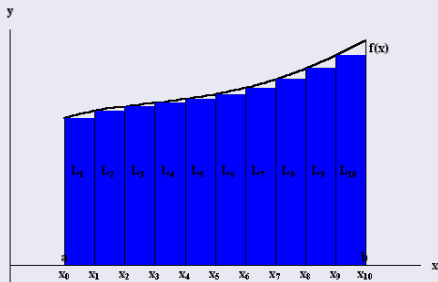
Integral

Áreas

Densidades

Fim

Área debaixo de uma curva, *bis*



- Uma forma de calcular a área é somar a área de todos os retângulos da figura acima.
- Mas note que tem sempre um pequeno erro nisto.
- Mas quanto mais retângulos tivermos, cada vez menores, mais próximos estaremos da área real.



Áreas IV

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

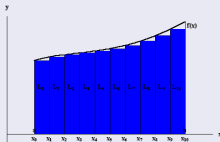
Integral

Áreas

Densidades

Fim

Área debaixo de uma curva, *ter*



- A área total debaixo do gráfico é portanto a soma de um número infinito de retângulos cujas bases são infinitesimais.
- Chamamos de dx o comprimento de cada base.
- A área de cada retângulo será $f(x)dx$.
- E a área total será a soma de todos estas áreas, e a denotamos por:

$$\int_b^a f(x)dx$$



Integrais

- A notação usada para representar área debaixo de uma curva é sugestiva;
- Mas o que a esta área tem a ver com a integral indefinida (que era, como vimos, uma antiderivada).
- Há um teorema que diz (o teorema fundamental do cálculo) :

$$\int_b^a f(x)dx = \int^a f(x)dx - \int^b f(x)dx$$

aonde as integrais do lado direito são as integrais indefinidas de $f(x)$ calculadas nos pontos a e b .

- A integral do lado esquerdo é chamada de "**integral definida de $f(x)$ entre a e b** ".



Áreas VI

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

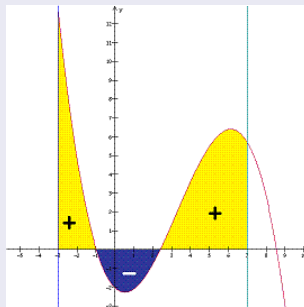
Áreas

Densidades

Fim

Integrais, *bis*

- Só que temos que ter cuidado:
- As áreas das quais falamos tem sinal:



- A parte negativa conta com sinal negativo.



Densidades

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Densidades

- Voltemos agora a alguns conceitos que podemos usar em biologia de populações.
- Muitas das medidas que podemos fazer são de número de indivíduos por área.
- Ou seja a densidade de indivíduos.
- Se estudamos uma certa população, esta densidade pode variar de ponto para ponto.
- Há lugares mais fortemente populados e outros menos.
- E se quisermos saber a população total numa certa região?



Densidades II

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

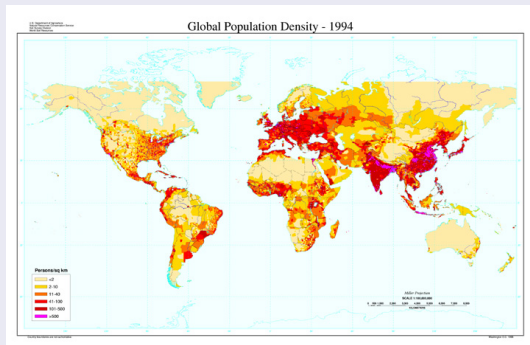
Integral

Áreas

Densidades

Fim

Densidade e População Total





Densidades III

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Densidade e População Total, *bis*

- Na página anterior mostra-se um mapa da densidade de pessoas no mundo.
- Para saber a população total do mundo você poderia:
 - Dividir o mundo em minúsculas regiões;
 - calcular a população de cada uma destas regiões multiplicando a densidade pela área;
 - somar as populações de todas as regiões
 - Em suma você quer calcular a integral definida da densidade....
 - Ou seja:

$$\text{número total de Indivíduos entre os pontos } a \text{ e } b = \int_b^a \rho(x) dx$$

onde $\rho(x)$ é a densidade da população no ponto x .



Resumo Final

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

O que devo lembrar

- A integração indefinida é a operação inversa da diferenciação.
- Ou seja: a integral indefinida de $f(x)$ é uma outra função $g(x)$ tal que a derivada de esta é a primeira função, $f(x)$.
- Podemos relacionar a integral indefinida com o cálculo de áreas (com sinal) debaixo da curva do gráfico de $f(x)$.
- Usamos isso no dia-a-dia para obter, por exemplo, populações totais a partir de densidades populacionais.

Obrigado pela atenção