



Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Leis

Equação
diferencial

Mais Equações

Generalidades

Soluções
Numéricas

Resumo Final

Escola de Biomatemática da Bahia

Roberto André Kraenkel, *IFT*

Apontamentos de Cálculo Diferencial e Integral Parte III

UFBA, 2024



Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Leis

Equação
diferencial

Mais Equações

Generalidades

Soluções
Numéricas

Resumo Final

Sumário

1 Leis

2 Equação diferencial

3 Mais Equações

4 Generalidades

5 Soluções Numéricas

6 Resumo Final



Leis

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Leis

Equação
diferencial

Mais Equações

Generalidades

Soluções
Numéricas

Resumo Final

Taxas de variação, de novo

- Voltemos a falar de taxas de variação. Taxas de variação no tempo.
- Muitas das variáveis que medimos – por exemplo, número de indivíduos de uma espécie numa dada área – podem variar no tempo.
- Podemos observar padrões de variação tanto em laboratório, quanto no campo.
- Mas, além da pura observação, gostaríamos de saber o que gera estas variações no tempo.
- Exemplo: por que cresce uma população?
- Gostaríamos de sair de um processo biológico e chegar em um padrão de variação dinâmica.¹

¹Usualmente o adjetivo dinâmico é associado a variações no tempo. Assim, aos falarmos em dinâmica da populações, estamos nos referindo no mais das vezes a como esta população muda com o passar do tempo.



Leis II

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Leis

Equação
diferencial

Mais Equações

Generalidades

Soluções
Numéricas

Resumo Final

De onde vem a dinâmica

- Se falamos em *padrão de variação dinâmica*, falamos em taxa de variação $\Rightarrow$ falamos em *derivadas*.
- Queremos, por exemplo, saber o que faz a derivada no tempo (ou seja a taxa de variação temporal) da quantidade total de indivíduos num dado sítio ser diferente de zero.
- Para tal, precisamos estabelecer uma lei de crescimento (ou decrescimento).
- Vamos olhar o caso mais simples; para muitas populações o crescimento acontece pelo simples fato da população se reproduzir. E a tendência ao decrescimento vem do fato de indivíduos morrerem.
- Se, numa dada área, não houver migrações, reprodução e mortalidade são o que fazem a população variar.
- Assim, a taxa de variação da população deve depender da reprodução e da mortalidade.



Leis III

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Leis

Equação
diferencial

Mais Equações

Generalidades

Soluções
Numéricas

Resumo Final

Uma lei simples, ainda sem matemática

- Vamos considerar um caso muito simples, em que uma população tem recursos abundantes para poder se reproduzir.
- Reprodução $\Rightarrow$ quanto mais indivíduos tivermos, mais nascem.
- Mortalidade $\Rightarrow$ o número de indivíduos que morrem deve ser proporcional ao número de indivíduos da população.
- Se são reprodução e mortalidade que determinam a variação na quantidade de indivíduos de uma população, então

a derivada temporal do número de indivíduos da população deve ser determinada pela população que existe neste momento.

- Vamos colocar isso em termos matemáticos.



Leis IV

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Leis

Equação
diferencial

Mais Equações

Generalidades

Soluções
Numéricas

Resumo Final

Uma lei simples, com matemática

- O que foi dito anteriormente se traduz por:

$$\frac{dN}{dt} \sim [\text{nascimentos} - \text{mortes}] \sim N(t)$$

- ou

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)$$

- aonde a constante r mede o balanço entre nascimentos e mortes.
- Vamos agora refletir sobre a construção acima.



Equação diferencial

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Leis

Equação
diferencial

Mais Equações

Generalidades

Soluções
Numéricas

Resumo Final

Uma equação



$$\frac{dN}{dt} = rN(t)$$

- A expressão acima diz que a variação da população é proporcional a ela mesma.
- Relaciona a derivada da função $N(t)$ com a própria função.
- Ou seja, é uma **equação** para determinar $N(t)$.
- É uma equação diferencial, pois envolve a derivada da função.
- Sua solução é uma função, não um número.
- É uma função tal que a sua derivada seja ela mesma multiplicada por um fator r .



Equação Diferencial II

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Leis

Equação
diferencial

Mais Equações

Generalidades

Soluções
Numéricas

Resumo Final

Resolvendo a nossa equação



$$\frac{dN}{dt} = rN(t)$$

- Sua solução é uma função tal que a sua derivada seja ela mesma multiplicada por um fator r
- Oras, já vimos uma função assim.
- Lembre-se que

$$f(t) = e^{rt} \Rightarrow \frac{df}{dt} = re^{rt} = rf(t)$$

- Ou seja, sabemos que

$$N(t) = e^{rt}$$

satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)$$



Equação diferencial III

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Leis

Equação
diferencial

Mais Equações

Generalidades

Soluções
Numéricas

Resumo Final

Soluções demais



$$\frac{dN}{dt} = rN(t)$$

- Ótimo, achamos um função que resolve a equação acima; $N(t) = e^{rt}$.
- Mas tem um porém. Podemos achar outra solução. Simples. Por exemplo:

$$N(t) = 2e^{rt} \quad \text{ou ainda} \quad N(t) = 10e^{rt} \quad \text{ou ainda} \quad N(t) = \frac{3}{2}e^{rt} \quad \text{ou ainda ...}$$

- Ou seja, todas as funções

$$N(t) = Ke^{rt}$$

com qualquer constante K , são soluções da equação no topo da página.

- E agora?



Equação diferencial IV

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Leis

Equação
diferencial

Mais Equações

Generalidades

Soluções
Numéricas

Resumo Final

Constante de integração

- $$\frac{dN}{dt} = rN(t) \Rightarrow N(t) = Ke^{rt}, \quad K \text{ uma constante arbitrária.}$$

- K recebe o nome de constante de integração
- Como determinamos K ?
- Impomos uma condição suplementar. Vejamos como.
- Suponha que saibamos a população em um dado momento. Chamemos esta população de N_0 e o tempo correspondente de $t = 0$. Então:

- $$N(0) = N_0$$

- A condição acima é chamada de **condição inicial**.
- O que implica em

$$N(0) = Ke^{r \cdot 0} = K = N_0 \quad \text{ou seja,} \quad K = N_0 \Rightarrow N(t) = N_0 e^{rt}$$



Equação diferencial V

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Leis

Equação
diferencial

Mais Equações

Generalidades

Soluções
Numéricas

Resumo Final

Recapitulando...

- Vejamos então o que fizemos até aqui:
- Relacionamos a taxa de variação do número de indivíduos da população com o número dos indivíduos presentes na população.
- Ou seja, o padrão de variação dinâmico é visto como gerado pela reprodução e mortalidade da população.
- Isso nos levou a uma equação diferencial.
- Vimos que ela tem inúmeras soluções: funções que descrevem o número de indivíduos da população.
- E para determinar uma solução única, precisamos de um conhecimento adicional: a população num dado momento do tempo.
- A equação diferencial que estudamos expressa uma lei de crescimento.
- Junto com a condição inicial, nos dá uma previsão para a dinâmica da população.
- Estamos aqui num mundo estritamente determinístico.



Equação diferencial VI

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Leis

Equação
diferencial

Mais Equações

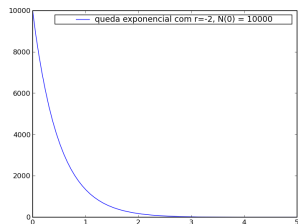
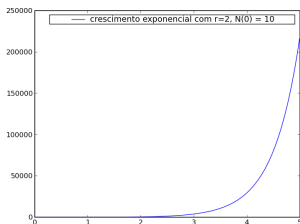
Generalidades

Soluções
Numéricas

Resumo Final

Gráfico

- E afinal, qual foi a previsão obtida a partir da equação diferencial?
- Duas possibilidades:
- Se $r > 0$ (taxa de nascimentos maior que a taxa de mortalidade): temos crescimento exponencial.
- Se $r < 0$ (taxa de nascimentos menor que a taxa de mortalidade):temos queda exponencial
- Alguns gráficos ajudam a entender isso melhor.





Mais equações

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Leis

Equação
diferencial

Mais Equações

Generalidades

Soluções
Numéricas

Resumo Final

Modelagem

- Você – com toda razão – pode argumentar que este padrão não é o único observado.
- É mesmo raro observa-lo.
- Não culpe a matemática, porém.
- O que foi colocado na equação é que o crescimento se dá pela reprodução e esta independe se há muitos ou poucos indivíduos.
- Mas sabemos que o crescimento pode ser menor quando a população é grande, por exemplo.
 - Pode faltar alimento; pode faltar espaço,....
- Isso por que existem mecanismos de regulação de uma população.
- Não colocamos isso na equação, não podemos esperar que ela nos descreva isso.
- Boa parte do curso de verão será traduzir mecanismos biológicos em equações.
- ão vamos nos adiantar nisso agora.
- Mas vamos ver mais algumas coisas sobre equações diferenciais.



Mais equações

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Leis

Equação
diferencial

Mais Equações

Generalidades

Soluções
Numéricas

Resumo Final

Mais sobre equações

- Vimos até aqui somente uma equação diferencial:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)$$

- Mas há muitas com as quais podemos nos divertir. Vamos brincar com algumas.
- Por exemplo:

$$\frac{df}{dt} = f(t) - f^2(t)$$

- E agora? Como resolvemos isso?
- Ou então essa aqui:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -f$$

- Bem-vindo ao mundo das equações diferenciais.
- Primeira lição: não existe um método geral para resolver equações diferenciais.
- Algumas delas tem soluções que sequer podem ser escritas como funções elementares (polinômios, exponenciais, trigonométricas).



Brincando com equações

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Leis

Equação
diferencial

Mais Equações

Generalidades

Soluções
Numéricas

Resumo Final

$$\frac{df}{dt} = f(t) - f^2(t)$$

- A equação acima é uma que pode ser resolvida.
- Aqui, a sua solução e seu gráfico (K uma constante arbitrária):

$$f(t) = \frac{1}{1 + Ke^{-t}}$$



- Mas de onde foi tirada esta solução?



Brincando com equaes II

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Leis

Equação
diferencial

Mais Equações

Generalidades

Soluções
Numéricas

Resumo Final

$$\frac{df}{dt} = f(t) - f^2(t) \Rightarrow f(t) = \frac{1}{1+Ke^{-t}}$$

- Primeiro verifique que temos uma solução:

$$\frac{df}{dt} = \frac{Ke^{-t}}{(1+Ke^{-t})^2}$$

$$f - f^2 = \frac{1}{1+Ke^{-t}} - \frac{1}{(1+Ke^{-t})^2} = \frac{Ke^{-t}}{(1+Ke^{-t})^2}$$

- note que de novo temos uma constante arbitrária.
- Esta solução pode ser obtida pelo processo na página seguinte.
- Não se assuste.



Brincando com equações III

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Leis

Equação
diferencial

Mais Equações

Generalidades

Soluções
Numéricas

Resumo Final

$$\frac{df}{dt} = f(t) - f^2(t) \Rightarrow f(t) = \frac{1}{1 + Ke^{-t}}$$

$$\frac{df}{dt} = f(t) - f^2(t) \Rightarrow \frac{df}{f - f^2} = dt$$

$$\int^f \frac{df}{f - f^2} = \int^t dt + C$$

$$\ln(f) - \ln(1 - f) = t + C \Rightarrow \ln(f/1 - f) = t + C \Rightarrow$$

$$\frac{f}{1 - f} = e^{t+C} \Rightarrow f = (1 - f)e^{t+C} \Rightarrow$$

$$f(1 + e^{t+C}) = e^{t+C}$$

$$f = \frac{1}{1 + Ke^{-t}} \quad \text{onde } K = e^{-C}$$



Generalidades

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Leis

Equação
diferencial

Mais Equações

Generalidades

Soluções
Numéricas

Resumo Final

Constantes de Integração

- Você viu que equações diferenciais podem ser complicadas de resolver.
- Isso, quando consegue-se resolvê-las.
- Mas é bom saber algumas coisas gerais sobre elas
 - Você viu que novamente tivemos uma constante de integração aparecendo.
 - Uma equação diferencial com derivadas de primeira ordem sempre terá uma constante de integração
 - Se a equação tiver derivadas de segunda ordem (como a $\frac{d^2f}{dt^2} = -f$) teremos duas constantes de integração. E assim por diante.
 - A propósito, esta última equação tem solução simples:

$$f(t) = A \sin(t) + B \cos(t) \quad \text{com } A \text{ e } B \text{ constantes de integração.}$$



Generalidades II

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Leis

Equação
diferencial

Mais Equações

Generalidades

Soluções
Numéricas

Resumo Final

Linearidade e Não-linearidade

Lembremos de duas equações diferenciais:

$$\frac{df}{dt} = f$$

$$\frac{df}{dt} = f - f^2$$

Há uma grande diferença entre elas.

- Na equação da esquerda podemos multiplicar uma solução por uma constante e ainda teremos uma solução
- Podemos somar duas soluções e ainda teremos uma solução.
- Na equação da direita **NÃO** podemos multiplicar uma solução por uma constante e ainda ter uma solução
- **NÃO** podemos somar duas soluções e ainda ter uma solução.
- A equação da esquerda é dita **linear** e a da direita, **não-linear**.



Métodos Numéricos

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Leis

Equação
diferencial

Mais Equações

Generalidades

Soluções
Numéricas

Resumo Final

Resolvendo de outra forma

- Vamos voltar à nossa equação diferencial mais simples: $\frac{dN}{dt} = rN$
- Mas vamos tratar de um caso bem concreto. Por exemplo: $r = 2$ e $N(0) = 20$.
- E vamos lembrar da definição de derivada:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} \quad \text{para } \Delta t \text{ muito pequeno}$$

- A rigor, para Δt infinitesimal.
- Mas vamos dizer que Δt tenha um valor definido. Digamos $\Delta t = 0.01$.
- Neste caso podemos escrever:

$$\frac{N(t + 0.01) - N(t)}{0.01} = 2N(t)$$



Métodos Numéricos

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Leis

Equação
diferencial

Mais Equações

Generalidades

Soluções
Numéricas

Resumo Final

Resolvendo de outra forma



$$\frac{N(t + 0.01) - N(t)}{0.01} = 2N(t)$$

- Mas então, se sabemos que $N(0)$ é 20, podemos calcular $N(0.01)$

$$N(0.01) - 20 = 0.01 \cdot 2 \cdot 20 \Rightarrow N(0.01) = 20 + 0.4 = 20.4$$

- Mas agora podemos calcular $N(0.02)$, pois

$$\frac{N(0.02) - N(0.01)}{0.01} = 2N(0.01) \Rightarrow N(0.02) - 20.4 = 2 \cdot 0.01 \cdot 20.4$$

$$\Rightarrow N(0.02) = 20.808$$

- E assim por diante:

$$N(0.03) - N(0.02) = 2 \cdot 0.01 \cdot N(0.02) \Rightarrow N(0.03) = 21.22416$$



Métodos Numéricos II

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Leis

Equação
diferencial

Mais Equações

Generalidades

Soluções
Numéricas

Resumo Final

E mais....

Com um pouco de paciência e uma calculadora podemos fazer uma tabela:

Tempo (s)	N(t)
0	20
0.01	20,4
0.02	20,808
0.03	21,22416
0.04	21,6486432
0.05	22,0816161
0.06	22,5232483
0.07	22,9737133
0.08	23,4331876
0.09	23,9018514
0.1	24,3798884

- Oras, estamos resolvendo a equação diferencial.
- Somente usamos a definição de derivada e
- **uma aproximação.** A de que $\Delta t = 0.01$.
- É claro que se usarmos um Δt menor, melhor será a aproximação.
- Chamamos este Δt de passo da integração.



Métodos Numéricos III

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Leis

Equação
diferencial

Mais Equações

Generalidades

Soluções
Numéricas

Resumo Final

- O que fizemos na página anterior é um exercício de integração numérica.
- Poderia ter sido feito para uma equação mais complicada.
- Sempre a mesma ideia: aproximar a derivada.
- Veja que é algo maquinal de se fazer.
- É algo que pode ser feito por um programa de computador.
- O bom é que já existem estes programas.
- E há, ademais, uma série de métodos mais rápidos que o método acima (chamado de método de Euler).
- Na grande maioria dos problemas de biologia de populações, a integração numérica é muito útil.



Resumo Final

Escola de
Biomatemática
da Bahia

R.A. Kraenkel

Leis

Equação
diferencial

Mais Equações

Generalidades

Soluções
Numéricas

Resumo Final

O que devo lembrar

- Equações diferenciais são uma forma de estabelecer relações entre padrões de variação temporal e os processos que lhes dão origem.
- Ligam derivadas de uma função com os valores desta função.
- Suas soluções são funções.
- Equações diferenciais nos dão um meio de formular leis determinísticas.
- Não há um método geral para resolver todo tipo de equação diferencial.
- Há casos simples, mas a maioria é um tanto complicada.
- Podemos também usar métodos numéricos para achar aproximações da solução de uma equação diferencial.
- Neste último caso, isso pode ser feito com programas de computador.

Obrigado pela atenção